О вычислимых операциях

В. А. Успенский

Доклады Академии Наук СССР, 1955, том 103, № 5, с. 773–776
(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 V 1955)

В последнее время в исследованиях по теории алгоритмов, наряду с понятием вычислимой функции, разрешимого и перечислимого множеств, которым соответствуют определения частично-рекурсивной функции, рекурсивного и рекурсивно-перечислимого множеств [2], все чаще стали появляться понятия функции, вычислимой относительно некоторых других функций (или сводящейся по вычислимости к этим другим функциям), и множества, разрешимого относительно некоторых других множеств (или сводящегося по разрешимости к этим другим множествам). Соответствующие этим интуитивным понятиям точные определения принадлежат Клини и Посту [2, 3]: говорят, что функция φ сводится по вычислимости к функциям $\psi_1, \ldots, \psi_l$, если φ частично-рекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$; говорят, что множество P сводится по разрешимости к множествам $Q_1, \ldots, Q_l$, если характеристическая функция P сводится по вычислимости к характеристическим функциям $Q_1, \ldots, Q_l$.

В настоящей заметке изучается естественно возникающее понятие множества, перечислимого относительно других множеств (или сводящегося по перечислимости к другим множествам). В терминах «сводимости по перечислимости» оказывается возможным сформулировать определения и двух других [упомянутых выше] видов сводимости (следствие теоремы 7 и теорема 8). Определение «сводимости по перечислимости» дается в п. 7 при помощи вводимого в п. 4 понятия вычислимой операции. В п. 5 устанавливается связь этого понятия с одним определением, предложенным ранее А. Н. Колмогоровым, а в п. 6 — с некоторыми еще более ранними конструкциями Поста. Пп. 1–3 носят вводный характер.

1. Системы множеств как топологические пространства. Всякую систему множеств $\mathcal{T}$ будем в дальнейшем без оговорок считать T_0-пространством со следующей топологией: для любого конечного множества F подсистему $\mathcal{O}_F \subseteq \mathcal{T}$ всех множеств из $\mathcal{T}$, содержащих F в качестве подмножества, назовем элементарной открытой; открытой подсистемой в $\mathcal{T}$ назовем любую сумму элементарных открытых. В частности, система $\mathcal{T}_M$ всех подмножеств и система $\mathcal{T}'_M$ всех конечных подмножеств произвольного множества M образуют каждая связное бикомпактное T_0-пространство.

Лемма. *Пусть $M_1, \ldots, M_l$ — произвольные множества, $\mathcal{T}$ — произвольная система множеств. Отображение f топологического произведения $\mathcal{T}_{M_1} \times \ldots \times \mathcal{T}_{M_l}$ в $\mathcal{T}$ тогда и только тогда непрерывно, когда для всяких $X_1 \subseteq M_1, \ldots, X_l \subseteq M_l$ выполняется равенство*

$$f(X_1, \ldots, X_l) = \bigcup_{\left\{ \substack{X'_1 \subseteq X_1, \ldots, X'_l \subseteq X_l; \\ X'_1 \in \mathcal{T}'_{M_1}, \ldots, X'_l \in \mathcal{T}'_{M_l}} \right\}} f(X'_1, \ldots, X'_l).$$

2. Множество $\mathcal{H}$. В теории алгоритмов приходится рассматривать не только множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, но и множество $\mathbb{N}^2$ всех упорядоченных пар и вообще множество $\mathbb{N}^n$ всех упорядоченных «n-ок» натуральных чисел, а также множество $\mathbb{N}_2 = \bigcup_k \mathbb{N}^k$ всех конечных

упорядоченных строчек натуральных чисел, множество $\mathbb{N}_3 = \bigcup_k \mathbb{N}_2^k$ всех конечных упорядоченных строчек элементов $\mathbb{N}_2$, и т. д. Нам будет удобно, поэтому, следуя Гильберту [1], сразу ввести в рассмотрение множество $\mathcal{H}$ всех «комбинаций» символа $|$ с самим собой. Множество $\mathcal{H}$ определяется как минимальное множество, удовлетворяющее условиям:

а) «единичная комбинация» $|$ и «пустая комбинация» Λ принадлежат $\mathcal{H}$;
б) если $\mathbf{a} \in \mathcal{H}$, то $(\mathbf{a}) \in \mathcal{H}$;
в) если $\mathbf{a} \in \mathcal{H}$ и $\mathbf{b} \in \mathcal{H}$, то $\mathbf{ab} \in \mathcal{H}$

(через $\mathbf{ab}$ обозначается результат приписывания справа $\mathbf{b}$ к $\mathbf{a}$, так что $\Lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\Lambda = \mathbf{a}$). Отождествим 0 с Λ, 1 с $|$, 2 с $||$ и т. д., а упорядоченную «n-ку» $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ элементов из $\mathcal{H}$ — с элементом $(\mathbf{a}_1) \ldots (\mathbf{a}_n) \in \mathcal{H}$. Тогда каждое из множеств $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}_k$ окажется подмножеством $\mathcal{H}$, и притом перечислимым (см. ниже). Системы $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ всех подмножеств и $\mathcal{T}'_\mathcal{H}$ всех конечных подмножеств $\mathcal{H}$ обозначим $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$. Каждый элемент $(\mathbf{a}_1) \ldots (\mathbf{a}_n) \in \mathcal{H}$ назовем представителем конечного (неупорядоченного) множества $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \in \mathcal{V}'$; каждое n-элементное множество из $\mathcal{V}'$ имеет, таким образом, $n!$ представителей в $\mathcal{H}$.

(1–1)-соответствие между некоторым подмножеством $\mathbb{N}$ и $\mathcal{H}$ называется (1–1)-нумерацией $\mathcal{H}$; число $h \in \mathcal{H}$, соответствующее элементу $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$, называется номером $\mathbf{h}$. Нумерацию назовем допустимой, коль скоро существуют такие вычислимые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x, y)$, что если m и n суть номера $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, то $\alpha(m)$ и $\beta(m, n)$ суть номера $(\mathbf{m})$ и $\mathbf{mn}$. Подмножество $R \subseteq \mathcal{H}$ назовем перечислимым (вообще, принадлежащим классу P_n, $n \geqslant 1$), если множество его номеров в допустимой номерации перечислимо (соответственно, принадлежит классу P_n проективно-рекурсивной классификаци Клини — Мостовского [6]); можно доказать, что понятие перечислимости (вообще, принадлежности классу P_n при $n \geqslant 1$) не зависит от того, из какой именно допустимой нумерации исходить.

3. Частичные отображения. Всякое отображение $E \subseteq X$ в Y будем называть частичным отображением X в Y; если X и Y — топологические пространства, то можно говорить о непрерывных частичных отображениях X в Y. Графиком частичного отображения ψ теоретико-множественной степени $\mathcal{H}^l$ в $\mathcal{H}$ назовем множество G_ψ всех таких элементов $(\mathbf{x}_1) \ldots (\mathbf{x}_l)\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, что $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l)$; графиком частичного отображения Ψ степени $\mathcal{H}^l$ в $\mathcal{V}$ назовем множество G_Ψ всех таких элементов $(\mathbf{x}_1) \ldots (\mathbf{x}_l)(\mathbf{y}) \in \mathcal{H}$, что $\mathbf{y} \in \Psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l)$; частичное отображение назовем вычислимым, если его график есть перечислимое множество. Каждое частичное отображение F теоретико-множественной степени $(\mathcal{V}')^l$ в $\mathcal{V}$ индуцирует частичное отображение $\tilde{F}$ степени $\mathcal{H}^l$ в $\mathcal{V}$ такое, что $\tilde{F}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_l) = F(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, коль скоро $\mathbf{x}_i \in \mathcal{H}$ есть представитель конечного множества $\xi_i \in \mathcal{V}'$ $(i = 1, \ldots, l)$; назовем F вычислимым, если $\tilde{F}$ вычислимо.

4. Вычислимые операции. Пусть $M_1, \ldots, M_l$ — перечислимые подмножества $\mathcal{H}$. Отображение $\mathcal{T}_{M_1} \times \ldots \times \mathcal{T}_{M_l}$ в $\mathcal{V}$ назовем вычислимой операцией[1] (l-местной), если: а) оно непрерывно; б) индуцированное им частичное отображение $(\mathcal{V}')^l$ в $\mathcal{V}$ вычислимо. При помощи леммы (п. 1) доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Суперпозиция вычислимых операций есть вычислимая операция.*

Теорема 2. *Всякое вычислимое и непрерывное частичное отображение $(\mathcal{V}')^l$ в $\mathcal{V}$ можно продолжить до вычислимой операции.*

Теорема 3. *Для всякой l-местной вычислимой операции[2] $\mathbf{U}$ и всяких перечислимых в $\mathcal{H}$ множеств $E_1, \ldots, E_l, D$ существует вычислимая операция $\mathbf{U}_1$, являющаяся отображением $\mathcal{T}_{E_1} \times \ldots \times \mathcal{T}_{E_l}$ в $\mathcal{T}_D$ и такая, что для всяких $S_1 \subseteq E_1, \ldots, S_l \subseteq E_l$, $R \subseteq D$ из $\mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l) = R$ вытекает $\mathbf{U}_1(S_1, \ldots, S_l) = R$.*

[1] Итак, вычислимая операция есть всюду определенная функция $\mathbf{U}\colon 2^{M_1} \times \ldots \times 2^{M_l} \to 2^\mathcal{H}$. — *Прим. наборщика.*
[2] Обозначение $\mathbf{U}$ неслучайно. Ниже $\mathbf{K}$ — операция Колмогорова, $\mathbf{P}$ — операция Поста. — *Прим. наборщика.*

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{U}$ — *вычислимая операция и* $R = \mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l)$. *Тогда, если* $S_i \in P_n$ $(n = 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, l)$, *то и* $R \in P_n$. *В частности, если все* S_i *перечислимы, то и* R *перечислимо.*

5. Операции Колмогорова. Минимальное множество, удовлетворяющее условиям а)–в) из п. 2 и содержащее сверх того «неизвестные» $x_1, \ldots, x_n$, обозначим $\mathcal{H}[x_1, \ldots, x_n]$. Каждый элемент $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{H}[x_1, \ldots, x_n]$ при замене $x_1, \ldots, x_n$ элементами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ из $\mathcal{H}$ переходит в элемент $g(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ из $\mathcal{H}$. Правилом Колмогорова называется строчка

$$g_1(x_1, \ldots, x_n),\ e_1;\ g_2(x_1, \ldots, x_n),\ e_2;\ \ldots;\ g_m(x_1, \ldots, x_n),\ e_m;\ \ g(x_1, \ldots, x_n),\ e, \qquad (*)$$

где $g_i(x_1, \ldots, x_n), g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}[x_1, \ldots, x_n]$; m, n, e_i, e — натуральные числа. Конечная упорядоченная система множеств $M_1, \ldots, M_k$ называется замкнутой относительно правила $(*)$, если для всяких $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{H}$ из $g_i(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in M_{e_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ вытекает $g(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in M_e$. Операция Колмогорова ($l$-местная) $\mathbf{K}$ задается конечным множеством $\mathcal{R}$ правил Колмогорова и набором натуральных чисел $k, t_1, \ldots, t_l, t$. Результат применения операции $\mathbf{K}$ к множествам $S_1, \ldots, S_l$ определяется так: рассматриваются системы множеств $M_1, \ldots, M_k$, замкнутые относительно каждого из правил $\mathcal{R}$ и такие, что $M_{t_i} \supseteq S_i$ $(i = 1, \ldots, l)$; среди них [систем] выбирается такая система $M_1^+, \ldots, M_k^+$, что для всякой из рассматриваемых систем $M_1, \ldots, M_k$ выполняются соотношения $M_i \supseteq M_i^+$ $(i = 1, \ldots, k)$; полагается по определению $\mathbf{K}(S_1, \ldots, S_l) = M_t^+$.

Теорема 5. *Для того, чтобы отображение* $\mathcal{V}^l$ *в* $\mathcal{V}$ *было вычислимой операцией, необходимо и достаточно, чтобы оно было операцией Колмогорова.*

6. Операции Поста. Обобщая и уточняя идеи Поста [4, 5], естественно приходим к следующему определению операции Поста. Через $\mathcal{S}_A[x_1, \ldots, x_n]$ обозначим минимальное множество:

а) содержащее множество $\mathcal{S}_A$ слов в алфавите A [7];
б) содержащее «неизвестные» $x_1, \ldots, x_n$;
в) вместе с каждыми своими элементами a и b содержащее элемент ab.

Каждый элемент $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{S}_A[x_1, \ldots, x_n]$ при замене $x_1, \ldots, x_n$ элементами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ из $\mathcal{S}_A$ переходит в элемент $g(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ из $\mathcal{S}_A$. Заменяя всюду в определении операции Колмогорова слова «правило Колмогорова» на «правило Поста», «операция Колмогорова» — на «операция Поста» и символ $\mathcal{H}$ на символ $\mathcal{S}_A$, получаем определение операции Поста в алфавите A. Операцию поста в алфавите Б $\supseteq A$ назовем операцией Поста над алфавитом A.

(1–1)-соответствие между некоторым подмножеством $\mathcal{H}$ и $\mathcal{S}_A$ назовем (1–1)-нумерацией $\mathcal{S}_A$; элемент $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$, соответствующий элементу $\mathbf{f} \in \mathcal{S}_A$, назовем номером $\mathbf{f}$. Нумерацию назовем допустимой, коль скоро существует такая вычислимая функция $\gamma(x, y)$ (т. е. вычислимое частичное отображение $\mathcal{H}^2$ в $\mathcal{H}$), что если $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ суть номера $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то $\gamma(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ есть номер $\mathbf{ab}$ (в частности, допустимой является нумерация, рассмотренная в [8]).

Теорема 6. *Выберем произвольную допустимую нумерацию и через* πM *обозначим совокупность номеров элементов множества* $M \subseteq \mathcal{S}_A$ *в этой нумерации. Для того, чтобы* l*-местная операция, ставящая в соответствие всяким множествам* $S_1, \ldots, S_l \subseteq \mathcal{S}_A$ *множество* $\mathbf{P}(S_1, \ldots, S_l) \subseteq \mathcal{S}_A$, *была операцией Поста над* A, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая вычислимая операция* $\mathbf{U}$, *что* $\pi\mathbf{P}(S_1, \ldots, S_l) = \mathbf{U}(\pi S_1, \ldots, \pi S_l)$.

7. Сводимость. Назовем множество R сводящимся по перечислимости к множествам $S_1, \ldots, S_l$, если существует такая вычислимая операция $\mathbf{U}$, что $R = \mathbf{U}(S_1, \ldots, S_l)$. Если S_i и R суть подмножества натурального ряда $\mathbb{N}$, то, в силу теоремы 3, можно считать, что $\mathbf{U}$ есть отображение $\mathbb{N}^l$ в $\mathbb{N}$.

Теорема 7. *Оператор* $\mathbf{F}$, *переводящий всякий набор арифметических функций* $\psi_1, \ldots, \psi_l$ *от* $m_1, \ldots, m_l$ *аргументов соответственно в* n*-местную функцию* $\varphi = \mathbf{F}(\psi_1, \ldots, \psi_l)$, *тогда и только тогда является частично-рекурсивным, когда существует такая вычислимая операция* $\mathbf{U}$, *что* $G_{\mathbf{F}(\psi_1,\ldots,\psi_l)} = \mathbf{U}(G_{\psi_1}, \ldots, G_{\psi_l})$.

(В силу теоремы 3 можно считать, что $\mathbf{U}$ есть отображение $\mathbb{N}^{m_1+1} \times \ldots \times \mathbb{N}^{m_l+1}$ в $\mathbb{N}^{n+1}$.)

Следствие. *Функция* φ *тогда и только тогда сводится по вычислимости к функциям* $\psi_1, \ldots, \psi_l$, *когда ее график сводится по перечислимости к графикам* $\psi_1, \ldots, \psi_l$.

Теорема 8. *Множество* P *тогда и только тогда сводится по разрешимости к множеству* Q, *когда каждое из подмножеств* P *и* $\overline{P}$ *сводится по перечислимости к* Q *и* $\overline{Q}$ (здесь $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ суть дополнения к P и Q; ср. [5]).

Следствие. *Если* P *и* Q *перечислимы, то сводимость по разрешимость* P *к* Q *равносильна сводимости по перечислимости* $\overline{P}$ *к* $\overline{Q}$.

А. Н. Колмогорову автор обязан значительным улучшением заметки.

Поступило 3 V 1955

Список литературы

[1] Гильберт Д. *Основания геометрии*, Москва: ОГИЗ, 1948, добавление VII.

[2] Kleene S.C. *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Pub. Co., 1952.

[3] Kleene S.C., Post E.L., The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability. *Annals of Mathematics*, vol. 59 (1954), no. 3, pp. 379–407.

[4] Post E.L. Formal reductions of the general combinatorial decision problem. *American Journal of Mathematics*, vol. 65 (1943), num. 2, pp. 197–215. DOI: 10.2307/2371809.

[5] Post E.L. Degrees of recursive unsolvability, abstract (preliminary report). *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 54 (1948), no. 7, p. 641–642.

[6] Mostowski A. On definable sets of positive integers. *Fundamenta Mathematicae*, vol. 34 (1947), num. 1, pp. 81–112.

[7] Марков А.А. *Теория алгорифмов*. Труды Математического института им. Стеклова АН СССР, том 42, М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1954, 376 с.

[8] Успенский В.А. Теорема Гёделя и теория алгоритмов. *Доклады АН СССР*, т. 91 (1953), № 4, с. 737–740.

Набрано 14.11.2018 (ezolin@yandex.ru). Изменения, внесенные при наборе текста:
– термины выделяем *курсивом*, а не р а з р я д к о й.
– в библиографии даны полные названия статей и журналов.
– множество натуральных чисел обозначаем $\mathbb{N}$, а не N.
– ссылки на библиографию указываем как [1], [2], а не ([1]), ([2]).
– некоторые перечисления 1) 2) 3), а) б) в) сделаны в виде списков.
– пишем $\mathcal{ABC}\ldots$ $\mathbf{a\,b\,x\,y}\ldots$ вместо готических букв: $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\ldots$
– в п. 5 пишем $e_1, \ldots, e_m, e$ вместо $\nu_1, \ldots, \nu_m, \nu$.
– в п. 5 пишем $t_1, \ldots, t_l, t$ вместо $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l, \varkappa$.
– указанные замены шрифта и обозначений сделаны макрокомандами.